Física 2
Guía de ejercicios Nro. 2
Cinemática rotacional de cuerpos rígidos

Semana de emisión: Semana 2
01/10/2018 al 05/10/2018

Objetivo instruccional e instrucciones

✓ El objetivo de esta guía es evaluar los conceptos de cinemática rotacional para los cuerpos rígidos en el plano, específicamente los conceptos relacionados con: Velocidad angular, aceleración angular, centro instantáneo de rotación, condición de rodadura, condición de contacto.

✓ Esta guía consta de tres parte: Verdadero y Falso (VF), Selección Simple (SS) y Desarrollo (D). En la parte de VF debe seleccionar entre un conjunto de afirmaciones cuál será verdadera o falsa. En la SS se debe seleccionar una de las cinco opciones mostradas, dentro de las opciones hay una única respuesta, por lo que debe seleccionar una sola opción. En la parte D se presentan un conjunto de planteamientos cuyas preguntas deben ser desarrolladas detalladamente, empleando alguna de las técnicas vistas en clase o la que usted considere pertinente.

✓ Estas guía contiene 29 preguntas

Parte I: Verdadero y falso

1. A continuación se presenta un conjunto de afirmaciones, si ésta es *falsa* indíquelo con la letra **F** y en caso contrario coloque la letra **V**, que indica *verdadera*.

   (a) Un resorte confeccionado con hierro es considerado como un cuerpo rígido. ___

   (b) Una tijera escolar es considerada como un cuerpo rígido. ___

   (c) Una barra de hierro es considerada como un cuerpo rígido. ___

   (d) La velocidad relativa entre dos puntos sobre un mismo cuerpo rígido siempre es cero. ___

   (e) Un cuerpo rígido presenta un movimiento de traslación, en general, cuando la velocidad del centro de masa es diferente de cero. ___

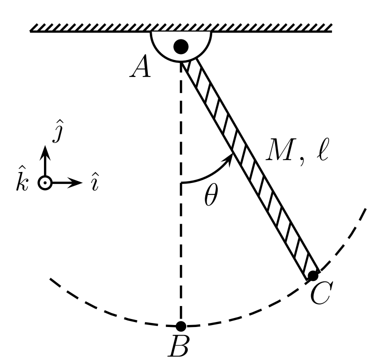
   (f) La velocidad del centro instantáneo de rotación (CIR) de un cuerpo rígido siempre es cero. ___

   (g) El CIR es un punto que siempre está ubicado sobre el cuerpo rígido. ___

   (h) Sobre un caucho, que rueda sin deslizar por el pavimento, actúa la fuerza de roce estática. ___

Parte II: Selección simple justificada

Planteamiento A: Una barra de longitud ℓ puede girar en torno a un pivote A, con una aceleración angular dada por $\vec{\alpha} = -\frac{3g}{2\ell}\,\text{sen}(\theta)\hat{k}$, siendo θ el ángulo que forma la barra en la posición AC respecto a la línea vertical AB, tal como se muestra en la figura adjunta. Inicialmente, la barra está en reposo cuando se encuentra dispuesta horizontalmente ($\theta = \pi/2$). Sobre la base de este planteamiento responda la siguientes cuatro preguntas, expresando sus resultados en la base canónica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ mostrada en la figura.



2. La rapidez angular de la barra, para la posición AC, viene dada por:

   A. $\frac{3gt}{2\ell}\operatorname{sen}\theta$

   B. $\sqrt{\frac{3g}{\ell}(1-\cos\theta)}$

   C. $\sqrt{\frac{3g}{\ell}\cos\theta}$

   D. $\sqrt{\frac{3g}{\ell}\operatorname{sen}\theta}$

   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.

3. Sea ω la rapidez angular de la barra en la posición AC, entonces, la velocidad del centro de masa de la barra en la misma posición y en el viaje de descenso viene dada por:

   A. $-\frac{\omega\ell}{2}(\cos\theta\hat{\imath}+\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath})$

   B. $\frac{\omega\ell}{2}(\cos\theta\hat{\imath}+\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath})$

   C. $\frac{\omega\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta\hat{\imath}+\cos\theta\hat{\jmath})$

   D. $-\frac{\omega\ell}{2}(\operatorname{sen}\theta\hat{\imath}+\cos\theta\hat{\jmath})$

   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.

4. La aceleración tangencial del punto C cuando la barra se encuentra en ascenso y presenta un ángulo tal que $\operatorname{sen}\theta = 4/5$, viene dada por:

   A. $\frac{18}{5}(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$

   B. $\frac{12}{5}(4\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$

   C. $\frac{18}{5}(-4\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$

   D. $-\frac{12}{5}(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$

   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.

5. La aceleración centrípeta del punto C cuando la barra se encuentra en ascenso y presenta un ángulo tal que $\operatorname{sen}\theta = 4/5$, viene dada por:

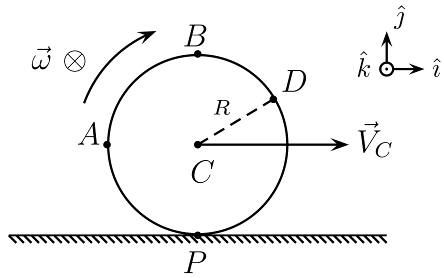
   A. $\frac{18}{5}(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$

   B. $\frac{12}{5}(4\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$

   C. $\frac{18}{5}(-4\hat{\imath}+3\hat{\jmath})$

   D. $-\frac{12}{5}(3\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$

   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.



Planteamiento B: Un cilindro de radio R (desconocido), gira con una velocidad angular constante de $\vec{\omega} = -2\hat{k}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ sobre una plataforma horizontal, tal como se indica en la figura adjunta. Adicionalmente, el centro de masa del cilindro se traslada con una velocidad constante $\vec{V}_C = 4\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Suponga que el segmento de recta $\overline{CD}$ forma un ángulo de $\pi/6$ respecto al vector $\vec{V}_C$. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes preguntas:

6. Si el cilindro rueda sin deslizar, el radio del cilindro es:
   - A. $2\,\text{m}$
   - B. $4\,\text{m}$
   - C. $1\,\text{m}$
   - D. $3\,\text{m}$
   - E. Ninguna de las anteriores.
     El valor es:_______________.

7. Si el radio del cilindro es $R = 3\,\text{m}$, la rapidez del punto P es:
   - A. cero;
   - B. $4\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - C. $-2\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - D. $+2\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - E. Ninguna de las anteriores.
     El valor es:_______________.

8. La rapidez del punto B cuando la rueda tiene un radio de $R = 2\,\text{m}$ es:
   - A. $4\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - B. $8\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - C. $2\hat{\imath}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - D. cero;
   - E. Ninguna de las anteriores.
     El valor es:_______________.

9. Si el radio del cilindro es $3\,\text{m}$ la rapidez en el punto A es:
   - A. $2\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - B. $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - C. $6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - D. $2\sqrt{13}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
   - E. Ninguna de las anteriores.
     El valor es:_______________.

10. La velocidad del punto D cuando el radio del cilindro es $2\,\mathsf{m}$ viene dada por:

    A. $(2\hat{\imath} - \sqrt{3}\hat{\jmath})\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$;

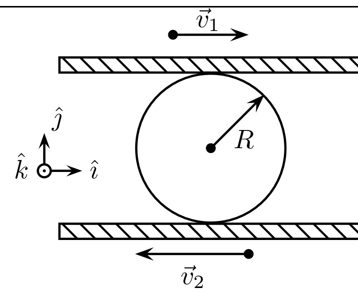
    B. $(6\hat{\imath} - 2\sqrt{3}\hat{\jmath})\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$;

    C. $(\sqrt{3}\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$;

    D. $(2\sqrt{3}\hat{\imath} - 6\hat{\jmath})\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$;

    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:_______________.

<u>Planteamiento C</u>: Una rueda de radio R se encuentra entre dos tablas muy largas, las cuales se mueven con velocidades constantes $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ según lo indicado en la figura adjunta. Suponga que $|\vec{v}_2| \geq |\vec{v}_1|$ y que las tablas no deslizan respecto a la rueda. Sobre la base de este planteamiento responda las siguientes tres preguntas



11. La velocidad angular de la rueda viene dada por:

    A. $\frac{v_1+v_2}{2R}\hat{k}$;

    B. $-\frac{v_1+v_2}{2R}\hat{k}$;

    C. $-\frac{v_2-v_1}{2R}\hat{k}$;

    D. $\frac{v_1-v_2}{2R}\hat{k}$;

    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:_______________.

12. La velocidad del centro de masa de la rueda viene dada por:

    A. $\frac{v_1+v_2}{2}\hat{k}$;

    B. $-\frac{v_1+v_2}{2}\hat{k}$;

    C. $-\frac{v_2-v_1}{2}\hat{k}$;

    D. $\frac{v_1-v_2}{2}\hat{k}$;

    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:_______________.

13. El centro instantáneo de rotación de la rueda se encuentra ubicado en:

    A. $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}R$ por debajo del CM;

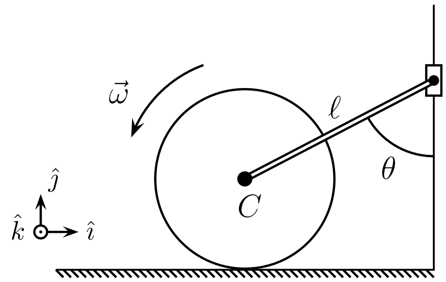
    B. R por arriba del CM;

    C. R por debajo del CM;

    D. $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}R$ por arriba del CM;

    E. El CM.

Planteamiento D: El mecanismo mostrado en la figura adjunta consta de un disco de radio R y masa M al cual se le sujeta, en su centro C, una barra ligera de longitud ℓ por uno de sus extremos. La barra a su vez tiene una corredera o collarín en el extremos opuesto a C, permitiéndole un movimiento vertical a dicho extremo de la barra, tal como se muestra en la figura adjunta. Considere que el disco rota sin deslizar con una velocidad angular $\vec{\omega}$ sobre una superficie horizontal, según lo indicado. En base a este planteamiento responda las siguientes cuatro preguntas:



14. El centro instantáneo de rotación de la barra se encuentra ubicado en:

    A. $\ell \cos\theta$ por arriba del C;

    B. $\ell \operatorname{sen}\theta$ por debajo del C;

    C. $\ell \operatorname{sen}\theta$ por arriba del C;

    D. $\ell \cos\theta$ por debajo del C;

    E. El CM.

15. La velocidad del centro de masa del disco para el momento mostrado en la figura es:

    A. $\omega\ell\cos\theta\hat{\imath}$;

    B. $-\omega\ell\cos\theta\hat{\imath}$;

    C. $-\omega R\hat{\imath}$;

    D. $\omega R\hat{\imath}$;

    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:______________.

16. La velocidad angular de la barra para el momento mostrado en la figura viene dada por:

    A. $(\omega R/\ell\cos\theta)\hat{k}$;

    B. $(-\omega R/\ell\cos\theta)\hat{k}$;

    C. $-\omega\hat{k}$;

    D. $\omega\hat{k}$;

    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:______________.

17. La rapidez de la corredera para el momento mostrado en la figura viene dada por:

    A. $\omega R\tan\theta$;

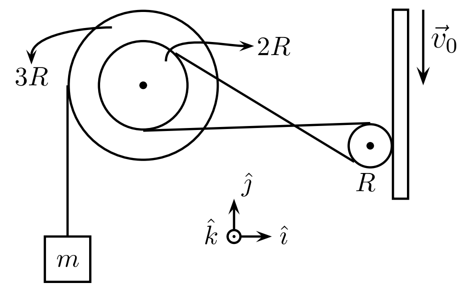
    B. $\omega R\cos\theta$;

    C. $\omega\ell\tan\theta$;

    D. $\omega\ell\operatorname{sen}\theta$;

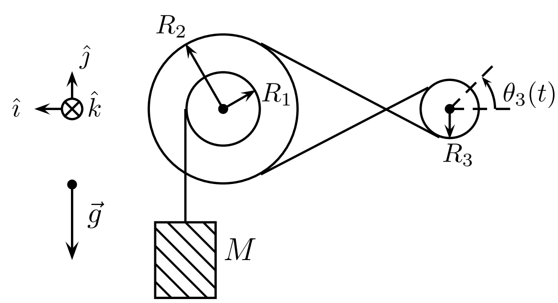
    E. Ninguna de las anteriores.
    El valor es:______________.

18. En la figura de abajo se muestra un sistema de poleas cuyos centros están fijos. La polea de radio $3R$ permite la tracción de un bloque de masa m por medio de una cuerda ligera. La polea de radio $2R$ está unida a la polea de mayor radio y a su vez se encuentra acoplada a otra polea, de radio R, a través de una cinta inextensible, la cual no desliza respecto a ambas poleas. La polea de menor radio gira debido a que se encuentra conectada por contacto a una tabla que se mueve con una velocidad $\vec{v}_0$ según lo indicado en la figura. La velocidad del bloque y la velocidad angular de la polea de radio $2R$ vienen dadas respectivamente por:



A. $+\frac{3}{2}\vec{v}_0$ y $+\frac{v_0}{2R}\hat{k}$;
B. $-\frac{3}{2}\vec{v}_0$ y $-\frac{v_0}{2R}\hat{k}$;
C. $+\frac{3}{2}\vec{v}_0$ y $-\frac{v_0}{2R}\hat{k}$;
D. $-\frac{3}{2}\vec{v}_0$ y $+\frac{v_0}{2R}\hat{k}$;
E. Ninguna de las anteriores.
Los valores son:____________________.

<u>Planteamiento E</u>: En la figura adjunta se muestra un conjunto de poleas, las cuales se encuentran fijas en sus centros y cuyos radios vienen dados por: $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ y $R_3 = \frac{R}{3}$, siendo R una constante positiva con dimensiones de longitud. La polea de radio R_1 se encuentra unida a la polea de radio R_2, por lo que rota solidariamente. La polea de radio R_2 se acopla a la polea de radio R_3 mediante una cinta inextensible. Un bloque de masa M se encuentra conectado a la polea de radio R_1 mediante una cuerda ideal. Si la polea de radio R_3 gira en sentido antihorario con una posición angular $\theta_3(t) = 3gt^2/R$. Responda las siguientes tres preguntas.



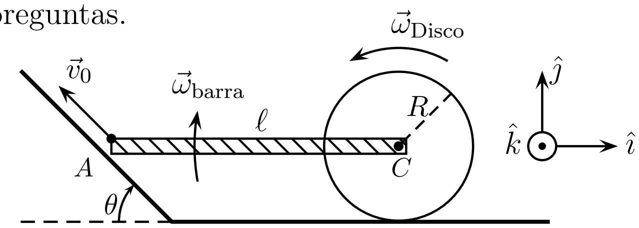
19. La velocidad angular (vector) de la polea de radio R_1, como función del tiempo.:

A. $\dfrac{g}{R}t\hat{k}$;
B. $\dfrac{3g}{R}t\hat{k}$;
C. $\dfrac{2g}{3R}t\hat{k}$;
D. $\dfrac{g}{6R}t\hat{k}$;
E. Ninguna de las anteriores.
El valor es:_______________.

20. La velocidad (vector) del bloque como función del tiempo:
    - A. $2gt\hat{\jmath}$;
    - B. $\frac{2}{3}gt\hat{\jmath}$;
    - C. $gt\hat{\jmath}$;
    - D. $\frac{1}{6}gt\hat{\jmath}$;
    - E. Ninguna de las anteriores.
      El valor es:_______________.

21. La magnitud de la tensión en la cuerda que sujeta al bloque:
    - A. Mg;
    - B. $\frac{3}{2}Mg$;
    - C. $\frac{1}{6}Mg$;
    - D. $2Mg$;
    - E. Ninguna de las anteriores.
      El valor es:_______________.

<u>Planteamiento F</u>: Un disco de radio R rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, su centro C se encuentra articulado con el extremo de una barra AC de longitud ℓ. El extremo A de la barra puede deslizar sobre un plano inclinado, cuyo ángulo de elevación con la horizontal es θ, tal como se muestra en la figura de abajo. Suponga que inicialmente la barra AC se encuentra dispuesta horizontalmente y que el extremo A asciende con rapidez v_0 por el plano inclinado. Para el momento indicado en la figura responda las siguientes cuatro preguntas.



En base a este planteamiento y para el momento mostrado en la figura responda las siguientes preguntas:

22. El centro instantáneo de rotación de la barra se encuentra ubicado en:
    - A. $\frac{\ell \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ por debajo del C;
    - B. $\frac{\ell \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ por arriba del C;
    - C. $\frac{\ell \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ por arriba del C;
    - D. $\frac{\ell \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ por debajo del C;
    - E. Ninguna de las anteriores.
      Se encuentra en:____________________.

23. La velocidad del centro del disco viene dada por la siguiente expresión:
   A. $-v_0 \cos\theta\hat{\imath}$;
   B. $-v_0 \operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + v_0 \cos\theta\hat{\jmath}$;
   C. $-v_0 \cos\theta\hat{\imath} + v_0 \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$;
   D. $-v_0 \operatorname{sen}\theta\hat{\imath}$;
   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.

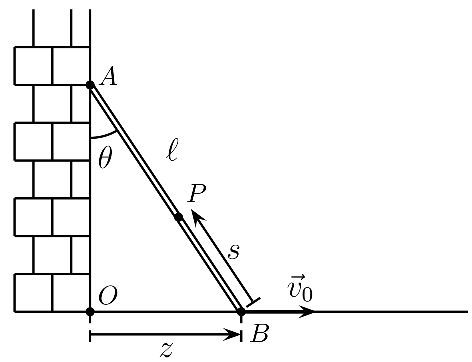
24. La velocidad angular de la barra y el disco vienen dadas, respectivamente, por las siguientes expresiones:
   A. $-\frac{v_0 \cos\theta}{\ell}\hat{k}$ y $\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{R}\hat{k}$;
   B. $-\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\ell}\hat{k}$ y $\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{R}\hat{k}$;
   C. $-\frac{v_0 \cos\theta}{\ell}\hat{k}$ y $\frac{v_0 \cos\theta}{R}\hat{k}$;
   D. $-\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{\ell}\hat{k}$ y $\frac{v_0 \cos\theta}{R}\hat{k}$;
   E. Ninguna de las anteriores.
   El valor es:_______________.

Respuesta de la parte de selección simple

Pregunta	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Respuesta	F	F	V	V	F	V	F	V	C	A	D	C	C	A	D	C	C	B	C	D
Pregunta	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	24
Respuesta	A	C	A	B		A	C	D	B	A	D									

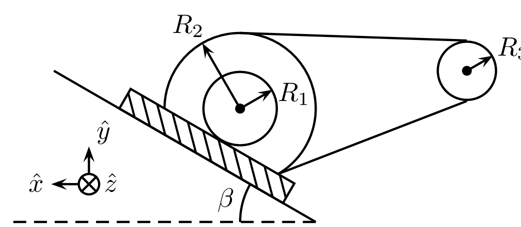
Parte III: Desarrollo.

1. Una escalera AB de longitud ℓ descansa sobre una pared vertical OA, tal como se muestra en la figura. El pie B de la escalera se hala hacia la derecha con rapidez constante v_0, de forma que el punto A nunca se despega de la pared. Suponga que inicialmente la escalera se encuentra en posición vertical, de manera que la coordenada horizontal inicial del pie B es $z_0 = 0\,\mathsf{m}$ y la coordenada vertical del punto A es ℓ. Considere un punto P sobre la escalera ubicado a una longitud s (fija) medida desde el pie B de la escalera. Las coordenadas cartesianas del punto P respecto al origen O son (x, y). El objetivo del problema es describir el movimiento de cada punto de la escalera, de forma que al final de cada cálculo el parámetro s puede tomar cualquier valor sobre los puntos de la escalera. En base a este planteamiento responda las siguientes preguntas.



   (a) Obtenga el vector velocidad angular de la escalera en términos del ángulo θ.
   (b) Exprese la rapidez angular de la barra en términos de la coordenada z, en lugar de la coordenada angular θ.
   (c) Determine la aceleración angular de la escalera en función de la coordenada z.
   (d) Encuentre el vector velocidad del punto P en términos de la coordenada angular θ y el parámetro s, exprese el resultado usando la base canónica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$.

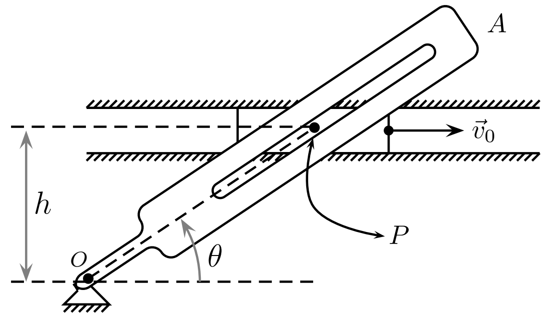
2. En la figura adjunta se muestra un con junto de poleas, las cuales se encuentran fijas en sus centros y cuyos radios vienen dados por: $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ y $R_3 = \frac{R}{3}$. La polea de radio R_1 se encuentra unida a la polea de radio R_2, y ésta última se acopla a la polea de radio R_3 mediante una cinta inextensible y de masa despreciable; como se indica en la figura. La polea de radio R_1 está en contacto con una tabla de longitud ℓ y masa M, la polea rueda sobre la tabla sin que exista deslizamiento entre si. La tabla se encuentra apoyada sobre una superficie inclinada sin fricción, con ángulo de elevación $\beta = 30°$. Si la polea de radio R_3 gira en sentido horario con una posición angular dada por $\theta_3(t) = \omega_0 t$ calcule:



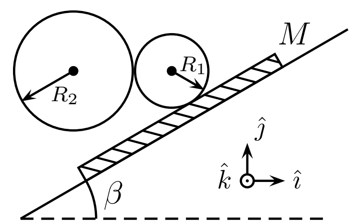
   (a) El vector velocidad angular de la polea de radio R_1.
   (b) El vector velocidad de la tabla.
   (c) La intensidad de la fuerza de fricción entre la tabla y la polea de radio R_1.

   Exprese los resultado en términos de los vectores unitarios $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ indicados en la figura.

3. La barra ranurada $\overline{OA}$ rota alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto O. El perno P se encuentra soldado a un bloque y es obligado a moverse dentro de la ranura practicada a la barra. El bloque se mueve a lo largo de una guía horizontal con una rapidez constante v_0, según la la orientación indicada en la figura, mientras que la orientación de la velocidad se determina bajo la condición de que el movimiento del bloque es acelerado. Suponga que la altura entre la articulación de la barra y la altura de la corredera es h (ver figura). En base a este planteamiento determine: (a) Encuentre una expresión para $\dot{\theta}$ en función de v_0, h y θ; (b) La velocidad del punto P de la barra ranurada. (c) La velocidad del punto P de la barra ranurada respecto al bloque.

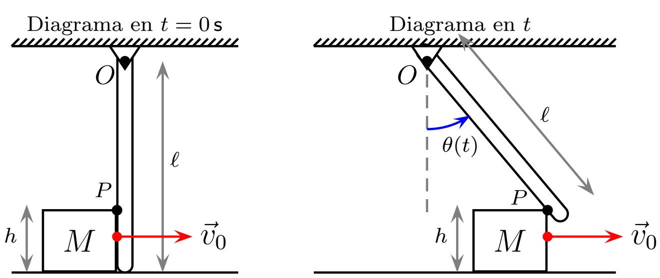


4. En la figura adjunta se muestra un dos poleas, las cuales se encuentran fijas en sus centros y cuyos radios vienen dados por: $R_1 = R$ y $R_2 = 2R$. La polea de radio R_1 se encuentra en contacto con la polea de radio R_2, de forma tal que ambas poleas rotan sin deslizar en el punto de contacto. La polea de radio R_1 está en contacto con una tabla de longitud ℓ y masa M, la polea rueda sobre la tabla sin que exista deslizamiento entre si. La tabla se encuentra apoyada sobre una superficie inclinada sin fricción, con ángulo de elevación $\beta = 30°$; como se indica en la figura. Si la polea de radio R_2 gira en sentido antihorario con una posición angular dada por $\theta_3(t) = \omega_0 t$ calcule:



   (a) El vector velocidad angular de la polea de radio R_1.
   (b) El vector velocidad de la tabla.
   (c) La intensidad de la fuerza de fricción entre la tabla y la polea de radio R_1.

5. En la figura adjunta se muestra un bloque de masa M que desliza a lo largo de un plano horizontal a la derecha con una velocidad constante $\vec{v}_0$, además el bloque presenta una altura h y permanece en contacto, en todo momento, a una barra de longitud ℓ, la cual se encuentra articulada en el techo. Inicialmente, la barra está completamente vertical, tal como se indica en la figura adjunta (izquierda). Al cabo de un tiempo t la barra se inclina formando un ángulo $\theta(t)$ respecto a la vertical, tal como se ilustra en la figura adjunta (derecha), de forma que la barra y el bloque siguen en contacto mediante su arista P. Considere como origen a la articulación del techo para expresar la base coordenada. Sobre la base de este planteamiento, responda las siguiente preguntas:



   (a) Encuentre el vector posición, en coordenadas cartesianas, del punto material P ubicado sobre el bloque, y exprese dichas coordenadas como función del tiempo.

(b) Escriba la velocidad del punto material P, en coordenadas polares, perteneciente a la barra. Para ello considere que la coordenada radial r es medida desde la articulación, mientras que la coordenada angular θ es medida desde la vertical, tal como se indica en la figura. En este contexto los versores $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ apuntan en la dirección radial y tangente en que crecen r y θ, respectivamente.

(c) Explique por qué la velocidad del punto material P de la barra no es la misma velocidad del punto material P del bloque. Adicionalmente, argumente porque deben cumplirse las siguientes condiciones en el problema

$$\hat{\imath} \cdot \vec{v}^{\,bloque}_{P/O} = \hat{\imath} \cdot \vec{v}^{\,barra}_{P/O} \quad \text{y} \quad \hat{e}_\theta \cdot \vec{v}^{\,bloque}_{P/O} = \hat{e}_\theta \cdot \vec{v}^{\,barra}_{P/O}$$

(d) Resolviendo las dos relaciones del inciso anterior, demuestre que la coordenada radial en términos de la coordenada angular puede ser escrita como

$$r(\theta) = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Adicionalmente, explique como puede obtenerse este resultado a partir de la geometría que se muestra en la figura del enunciado, para ello tenga presente que la rapidez del punto material P, tanto del bloque como el de la barra, es v_0.

(e) Demuestre que la posición angular y la coordenada radial, ambas como función del tiempo, vienen dada respectivamente por:

$$\theta(t) = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{v_0 t - (\ell - h)}{v_0 t + (\ell - h)}\right] \quad \text{y} \quad r(t) = v_0 t - 2(\ell - h)\ln\left[\frac{v_0 t + (\ell - h)}{\ell - h}\right]$$